

Propiedades de la integral.

1) Fijada una curva $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, el mapa
 $C(\gamma^*) \rightarrow \mathbb{R} / F \mapsto \int_{\gamma^*} F \cdot ds$ es lineal.

2) Aditividad: $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} F \cdot ds = \int_{\gamma_1} F \cdot ds + \int_{\gamma_2} F \cdot ds$

3) Supongamos que $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva regular,
 $\varphi: [c,d] \rightarrow [a,b]$ es un homeomorfismo de clase C^1 en (a,b) .

Entonces:

$$\begin{cases} \int_{\gamma \circ \varphi} F \cdot ds = \int_{\gamma} F \cdot ds & \text{si } \varphi'(t) \geq 0 \quad \forall t \in (a,b) \\ \int_{\gamma \circ \varphi} F \cdot ds = - \int_{\gamma} F \cdot ds & \text{si } \varphi'(t) \leq 0 \quad \forall t \in (a,b). \end{cases}$$

En particular $\int_{-\gamma} F \cdot ds = - \int_{\gamma} F \cdot ds$.

4) $\left| \int_{\gamma} F \cdot ds \right| \leq \int_{\gamma} \|F\| ds \leq \underbrace{\left(\max_{x \in \gamma^*} \|F(x)\| \right)}_K \ell(\gamma).$

dem.

1) y 2) ✓

3) $\int_{\gamma \circ \varphi} F \cdot ds = \int_c^d F(\gamma(\varphi(t))) \cdot (\gamma \circ \varphi)'(t) dt = \int_c^d F(\gamma(\varphi(t))) \cdot \gamma'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$
 $= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} F(\gamma(u)) \cdot \gamma'(u) du = \pm \int_{\gamma} F \cdot ds$ dependiendo de si
 $u = \varphi(t)$ φ es creciente o decreciente.

4) $\left| \int_{\gamma} F \cdot ds \right| = \left| \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)| dt$
 $\stackrel{CS}{\leq} \int_a^b \|F(\gamma(t))\| \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|F\| ds \leq K \ell(\gamma)$

Recordemos que:

Teorema: Sea $F: U \rightarrow \mathbb{R}^M$ un campo vectorial continuo.

Son equivalentes:

1) Existe un potencial escalar $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ($\nabla f = F$).

2) $\int_{\gamma} F \cdot ds$ sólo depende de $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$.

3) $\oint_{\gamma} F \cdot ds = 0 \quad \forall \gamma$ cerrada.

Supongamos que F satisface las condiciones del teorema,

$F = (F_1, \dots, F_M)$, ~~estas~~ y que F es de clase C^1 .

Entonces $F_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ para cierto potencial f de clase C^2 .

Luego $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall i, j = 1, \dots, M$ (Schwarz). Es decir

que $\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$.

En otras palabras:

Corolario: Si $F: U \rightarrow \mathbb{R}^M$ es un campo vectorial conserva-

tivo de clase C^1 , entonces $F'(a) = \begin{bmatrix} \nabla F_1(a) \\ \vdots \\ \nabla F_M(a) \end{bmatrix}$ es una

matriz simétrica.

#

• Esta condición necesaria del Corolario será también suficiente?

No!

Ejemplo: Sea $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} / F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$

$$\text{Entonces } \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Sin embargo, si $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} / \gamma(t) = r(\cos t, \sin t)$

$$\begin{aligned} \text{entonces: } \int_{\gamma} F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-r \sin t}{r^2}, \frac{r \cos t}{r^2} \right) \cdot (-r \sin t, r \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

Entonces F no es conservativo.

Sin embargo, en cualquier disco que no contenga al origen, F tiene un potencial escalar:

Lema (Poincaré)

Supongamos que $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un campo ~~abierto~~ ^{abierto} y que U es ~~abierto~~ ^{abierto} en respecto a un punto p . Entonces F admite un potencial escalar en U .

Dem.

$$\text{Sea } f: U \rightarrow \mathbb{R} / f(x) := \int_{[p,x]} F \cdot ds = \int_0^1 F(p+u(x-p)) \cdot (x-p) du.$$

Entonces $f(x) = \int_0^1 F(\sigma(u, x)) \cdot (x-p) du = \sum_{j=1}^m \int_0^1 F_j(\sigma(u, x)) (x_j - p_j) du,$

donde $\sigma: [0,1] \times U \rightarrow U / \sigma(u, x) = p + u(x-p)$. Es claro que $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, x) = x-p$,

y que $\frac{\partial \sigma}{\partial x_i}(u, x) = u e_i$. Como F es de clase C^1 y σ de clase C^∞ ,

entonces $F \circ \sigma$ es de clase C^1 , así que según la regla de Leibniz:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(u, x) = \sum_{j=1}^m \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} ((x_j - p_j) F_j \circ \sigma(u, x)) du = \sum_{j=1}^m \int_0^1 \left[\frac{\partial (x_j - p_j)}{\partial x_i} F_j \circ \sigma(u, x) + (x_j - p_j) \frac{\partial (F_j \circ \sigma)}{\partial x_i}(u, x) \right] du$$

$$= \int_0^1 F_i(\sigma(u, x)) du + \sum_{j=1}^m \int_0^1 (x_j - p_j) \nabla F_j(\sigma(u, x)) \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}(u, x) du$$

$$= \int_0^1 F_i(\sigma(u, x)) du + \sum_{j=1}^m \int_0^1 (x_j - p_j) \nabla F_j(\sigma(u, x)) \cdot (u e_i) du$$

$$= \int_0^1 F_i(\sigma(u, x)) du + \int_0^1 \sum_{j=1}^m u \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\sigma(u, x)) (x_j - p_j) du$$

$$= \int_0^1 F_i(\sigma(u, x)) du + \int_0^1 u \frac{\partial (F \circ \sigma)}{\partial x_i}(u, x) du$$

Int. por partes

$$= \int_0^1 F_i(\sigma(u, x)) du + u (F \circ \sigma)(u, x) \Big|_0^1 - \int_0^1 F_i(\sigma(u, x)) du$$

$$= F_i(\sigma(1, x)) = F_i(x).$$

Por lo tanto $\nabla f(x) = F(x)$, $\forall x \in U$.

#

Obs: El lema de Poincaré vale también para abertos

simplemente conexos (ver Lages Lima Vol II). Un conjunto X es simplemente conexo si toda curva cerrada $\gamma: [a,b] \rightarrow X$ puede ser deformada (dentro de X) a un punto: $\exists p \in X$ y $H: [0,1] \times [a,b] \rightarrow X$ continua tal que $H(0,t) = \gamma(t)$, $H(1,t) = p$, $\forall t \in [a,b]$, y $H(s,a) = H(s,b) \forall s \in [0,1]$

